

交比为负常数的 SG 圆模式与可积系统*

谷芳芳, 蓝师义

(广西民族大学数学与计算机科学学院, 广西 南宁 530006)

摘 要: 给出交比为负常数的 SG 圆模式的定义, 即其中每一个圆与它相邻圆的四个交点的交比等于一个给定的负常数。通过求解适当的 Cauchy 问题得到其存在性。在正方形网格上建立 SG 圆模式与可积系统之间的联系。讨论了正方形网格上可积系统的一类同单值解。按照 SG 圆模式, 给出了解析函数 z^a 与 $\log z$ 的离散模拟。

关键词: SG 圆模式; 可积系统; 同单值解

中图分类号: O174.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2009) 04-0015-06

SG Circle Patterns with a Negative Constant Cross-ratio and Integrable Systems

GU Fangfang, LAN Shiyi

(Department of Mathematics and Computer Science,

Guangxi University for Nationalities, Nanning 530006, China)

Abstract: SG circle patterns with a negative constant cross-ratio are defined. That is, for every circle the cross-ratio of its four intersection points with neighboring circles is equal to a negative constant. The existence of such circle patterns is obtained by solving a suitable Cauchy problem. The relation between SG circle patterns and integrable systems on the square grid is established. A class of isomonodromic solutions of integrable system on the square grid is discussed. Discrete analogous of analytic functions z^a and $\log z$ are presented in terms of SG circle patterns.

Key words: SG circle pattern; integrable system; isomonodromic solution

圆填充理论 (circle packing) 理论以及更一般的圆模式 (circle pattern) 理论近年来得到了快速发展, 并引起了越来越多复分析专业人士的兴趣。它起源于 Fields 奖获得者 Thurston^[1] 在 1985 年提出的一个猜想, 即六边形圆填充可以用来近似 Riemann 映射。不久, Rodin 等^[2] 证明了 Thurston 方案的收敛性。自此之后, 这个理论被分为许多分支, 其中一个分支围绕着 Koebe-Andreev-Thurston 单值化定理, 包括实现给定一个复形的圆填充, 圆填充的刚性和构造双曲三维流形等问题^[3-5]。

另一个分支主要研究复分析和微分几何中经典问题的离散近似。其中最著名的是六边形圆填充 (hexagonal circle packing) C^∞ -收敛于 Riemann 映射, 这被 He 等^[6] 所证明。具有正方形网格组合的圆模式 (SG 圆模式) 也有类似的结果^[7-8], 而且 SG 圆模式有很多明确的例子, 例如可以离散模拟函数 $\exp(z)$, $\operatorname{erf}(z)$, $\operatorname{Airy}(z)$, z^c , $\log z$ 等^[7,9]。Bobenko 等^[10] 引进了多交比为 -1 的六边形圆模式, 得到了六边形的圆模式与正六边形网格上可积系统的关系。

* 收稿日期: 2008-09-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10771220); 广西教育厅科研资助项目 (200707MS043); 广西民族大学重大科研资助项目 (2008ZD009); 广西自然科学基金资助项目 (0991081); 广西民族大学研究生教育创新资助项目 (gxun-chx0880)

作者简介: 谷芳芳 (1980 年生), 女, 硕士生; 通讯作者: 蓝师义; E-mail: lanshiyi@gxun.cn

具有固定交角的六边形圆模式以及函数 z^α 与 $\log z$ 的六边形圆模式离散模拟已被研究^[11-12]。

本文我们致力于具有正方形网格组合的圆模式(称为 SG 圆模式)的研究。正方形网格中每个基本正方形对应了一个圆,两个正方形的公共顶点对应于它们所对应圆的交点,每个圆与其相邻圆有四个交点,每个交点处有四个圆通过。给定一个常数 $c > 0$,我们定义了交比值为 $-c$ 的 SG 圆模式,即其每个圆上四个交点的交比值等于 $-c$ 。通过解适当的 Cauchy 问题证明了这样的圆模式的存在性。其次,我们讨论了正方形网格上的可积系统,给出了可积系统与 SG 圆模式的关系,并讨论了正方形网格上可积系统中的一类同单值解及其对应的圆模式。最后给出了当 $c = -1$ 时函数 z^α 与 $\log z$ 的 SG 圆模式离散模拟。

值得指出,这里讨论的 SG 圆模式与文 [7] 有所不同,文 [7] 中正方形网格上的顶点对应于圆,与同一条边上两个顶点对应的两个相邻圆是正交的;而本文中正方形网格的面与圆对应,顶点对应于圆的交点,相邻的两个圆不一定正交,但每个圆上四个交点的交比等于 $-c$ 。与文 [10] 比较,不同的是:第一,文 [10] 讨论的是多交比为 -1 的六边形圆模式,而我们研究的是交比等于负常数的 SG 圆模式;第二,文 [10] 研究正六边形网格上可积系统与六边形圆模式的联系,这里我们讨论正四边形网格上可积系统与 SG 圆模式的关系;第三,文 [10] 六边形圆模式离散模拟函数 z^α 与 $\log z$, 而我们用 SG 圆模式离散模拟它们。

1 交比为 $-c$ 的 SG 圆模式

复平面 C 上的正方形网格 SG 是这样—个胞腔复形,其顶点为 $V(SG) = \{z = k + li : k, l \in \mathbb{Z}\}$; 其边为 $E(SG) = \{[z_1, z_2] : z_1, z_2 \in V(SG), |z_1 - z_2| = 1\}$; 其二胞腔是由所有基本正方形 $\{z + x + y : x, y \in [0, 1]\} (z \in V(SG))$ 组成的集合。

定义 1 称一个映射 $\omega: V(SG) \rightarrow \hat{C}$ 定义了一个 SG 圆模式,如果它满足下面条件: 设 $z_1 = z, z_2 = z + 1, z_3 = z + 1 + i, z_4 = z + i$ 是 SG 中基本正方形的顶点,则它们的像点 $\omega(z_1), \omega(z_2), \omega(z_3), \omega(z_4)$ 位于一个圆上,且按其顺序排列。这样,这个圆就与上面的基本正方形形成了一个对应。

在这种情况下,如果 SG 中两个基本正方形有公共边 $[z_1, z_2] \in E(SG)$, 那么它们对应的圆相交于点 $\omega(z_1)$ 与 $\omega(z_2)$ 。类似地,如果 SG 中的基本

正方形有一个公共点 $z_0 \in V(SG)$, 则它们对应的圆也有一个公共交点 $\omega(z_0)$, 并且在这个公共交点处,相邻的圆是相交的,半相邻的圆是相切的。

定义 2 设映射 $\omega: V(SG) \rightarrow \hat{C}$ 定义了一个 SG 圆模式,如果对 SG 中的任一个顶点为 z_1, z_2, z_3, z_4 (逆时针排列)的基本正方形,其对应圆上四个交点的交比

$$cr[\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4] = \frac{(\omega_1 - \omega_2)(\omega_3 - \omega_4)}{(\omega_2 - \omega_3)(\omega_4 - \omega_1)} = -c \quad (1)$$

其中, $c > 0$ 是一个常数, $\omega_k = \omega(z_k) (k = 1, \dots, 4)$, 则我们称映射 ω 定义了一个交比为 $-c$ 的 SG 圆模式。

关于交比为 $-c$ 的 SG 圆模式的存在性,有

定理 1 对于给定的正方形网格 SG, 在扩充复平面 $\hat{C}$ 上一定存在一个实现其交比等于 $-c$ 的 SG 圆模式。

证明 通过解适当的柯西问题得出其存在性。考虑由西北方向到东南方向的一行 SG 的基本正方形,在每个正方形的三个顶点 $z, z+1, z+i$ 处定义映射 ω , 这三点 $\omega(z), \omega(z+1), \omega(z+i)$ 决定了一个圆。等式 (1) 决定了点 $\omega(z+1+i)$ 也在圆上,这样往东北方向下一行的每个正方形,映射 ω 在其相应三个顶点处的值也决定了。这样无限地做下去,那么在整个网格 SG 上,就唯一地决定了一个映射 $\omega: V(SG) \rightarrow \hat{C}$, 于是就得到了一个交比等于 $-c$ 的 SG 圆模式。

2 正方形网格 SG 上的平坦联络与可积系统

文 [10] 给出了图上可积系统的一般构造方法,它主要包括: (a) 一个定向图 ζ , 它的顶点记为 $V(\zeta)$, 它的边记为 $E(\zeta)$; (b) 一个圈群 $G(\lambda)$, 它的元素是从 C 到群 G 的函数,这些函数的幅角 λ 称为谱参数; (c) 一个定义在 ζ 的顶点上的“波函数” $\psi: V(\zeta) \rightarrow G(\lambda)$; (d) 一个定义在 ζ 的边上的“转移矩阵”集合 $L: E(\zeta) \rightarrow G(\lambda)$ 。

假设对任一定向边 $e = (z_1, z_2) \in E(\zeta)$, 波函数在其端点处的值有如下关系

$$\psi(z_2, \lambda) = L(e, \lambda) \psi(z_1, \lambda) \quad (2)$$

则“离散零曲率条件”应该是满足的,即对 ζ 中任意有限条边组成的闭曲线 $e_1 = (z_1, z_2), e_2 = (z_2, z_3), \dots, e_p = (z_p, z_1)$, 等式

$$L(e_p, \lambda) \cdots L(e_2, \lambda) L(e_1, \lambda) = I \quad (3)$$

成立,其中 I 是单位矩阵。特别地,对任一条边 $e = (z_1, z_2) \in E(\zeta)$, 如果 $e^{-1} = (z_2, z_1)$, 则

$$L(e^{-1}, \lambda) = (L(e, \lambda))^{-1} \quad (4)$$

回到正方形网格 SG 上, 我们规定这种类型的边是正向的: $E_1 = \{(z, z+1) | z \in V(SG)\}$, $E_2 = \{(z, z+i) | z \in V(SG)\}$, 如图 1。我们所使用的群 $G[\lambda]$ 是 $SL(2, C)$ 上的扭圈群:

$$\{L: C \rightarrow SL(2, C) | L(-\lambda) = \Omega L(\lambda) \Omega^{-1}\},$$

$$\Omega = \text{diag}(1, -1) \quad (5)$$

对每条正向边 $e \in E_n (n = 1, 2)$, $G[\lambda]$ 的元素具有形式:

$$L^{(n)}(e, \lambda) = (1 - \Delta_n \lambda^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda f \\ \lambda g & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

其中 $\Delta_1 = 1, \Delta_2 = -\frac{1}{c}$; 当 $e \in E_1$ 时, $fg = \Delta_1$,

当 $e \in E_2$ 时, $fg = \Delta_2$ 。

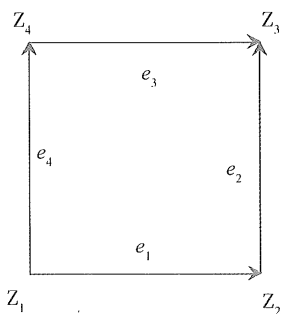


图 1 正方形网格 SG 的边的定向

Fig. 1 The orientation of the edges of the square grid SG

因此, 对每条正向边我们指定两个复数 $(f, g) \in C^2$ 满足上述条件。不难看出, 零曲率条件 (3) 对 SG 中所有的闭曲线都成立等价于它对于每一个基本正方形成立。

定理 2 设 e_1, e_2, e_4, e_3 分别是图 1 中基本正方形相继的两条正向边, 其中 $e_1, e_3 \in E_1$; $e_2, e_4 \in E_2$, 则零曲率条件 $L(e_1)L(e_2) = L(e_4)L(e_3)$ 等价于下面方程组

$$f_1 + f_2 = f_3 + f_4 \quad (7)$$

$$f_1 g_2 = f_4 g_3 \quad (8)$$

证明 直接计算可得矩阵方程 $L(e_1)L(e_2) = L(e_4)L(e_3)$ 包含了下面 4 个数量方程:

$$\textcircled{1} f_1 + f_2 = f_3 + f_4; \textcircled{2} g_1 + g_2 = g_3 + g_4; \textcircled{3} f_1 g_2 = g_3 f_4; \textcircled{4} g_1 f_2 = f_3 g_4$$

由 $f_1 g_2 = g_3 f_4 \Leftrightarrow \frac{\Delta_1 \Delta_2}{g_1 f_2} = \frac{\Delta_1 \Delta_2}{f_3 g_4} \Leftrightarrow g_1 f_2 = f_3 g_4$, 可得 $\textcircled{3}$ 与 $\textcircled{4}$ 等价。又由

$$f_1 + f_2 = f_3 + f_4 \Rightarrow \Delta_1 g_2 g_4 (g_3 - g_1) = \Delta_2 g_1 g_3 (g_2 - g_4) \quad f_1 g_2 = f_4 g_3 \Rightarrow \Delta_1 g_2 g_4 = \Delta_2 g_1 g_3, \text{ 我们得到 } g_1$$

$+ g_2 = g_3 + g_4$ 。因此, $\textcircled{2}$ 包含在 $\textcircled{1}$ 和 $\textcircled{3}$ 中。这就完成了这个定理的证明。

由 (8) 可得

$$f_1 f_3 = -c f_2 f_4 \quad (9)$$

方程 (7) 与 (9) 组成的系统称为交比系统。

方程 (7) 可以按下面的方式理解: 存在函数 $u: V(SG) \rightarrow C$ 使对任一条正向边 $e = (z_1, z_2)$ 有 $f(e) = u(z_2) - u(z_1)$, 且函数 u 由 f 唯一决定 (可相差一常数)。由此, 可以重新阐述方程 (9): 设 z_1, z_2, z_3, z_4 是图 1 中基本正方形相应的顶点, 则有

$$\frac{(u(z_1) - u(z_2))(u(z_3) - u(z_4))}{(u(z_2) - u(z_3))(u(z_4) - u(z_1))} = -c \quad (10)$$

现在我们讨论求解出交比系统的柯西数据。由 (10) 式立刻得出

命题 1 (a) 给出 u 在 $z_1, z_2 = z_1 + 1, z_3 = z_1 + i$ 的值, 则交比系统的方程 (10) 唯一决定了 u 在 $z_4 = z_1 + 1 + i$ 的值; (b) u 在从西北到东南方向的锯齿线顶点 $\{z = k + li; k + l = 0, 1\}$ 处的值, 唯一决定了整个格上的函数 $u: V(SG) \rightarrow C$; (c) u 在两个正半轴 $\{z = k; k \geq 0\} \cup \{z = li; l \geq 0\}$ 上的值, 唯一决定了函数 u 在整个扇形 (第一象限) $S = \{z = k + li; k, l \geq 0\}$ 的值。

定理 3 映射 $u: V(SG) \rightarrow C$ 定义了一个交比为 $-c$ 的 SG 圆模式。

证明 根据上面给出 u 的定义及其满足条件 (10), 我们容易推出该定理成立。

3 同单值解与圆模式

下面定义的“非自治约束”在交比系统的求解中是非常关键的。令 $u(z_k) = u_k$,

$$z_1 = z_0 + 1, z_2 = z_0 + i, \\ z_3 = z_0 - 1, z_4 = z_0 - i \quad (11)$$

$$f_1 = u_1 - u_0, f_2 = u_2 - u_0, \\ f_3 = u_0 - u_3, f_4 = u_0 - u_4 \quad (12)$$

定义其约束为

$$\alpha u + \varphi = k \frac{f_1 f_3}{f_1 + f_3} + cl \frac{f_2 f_4}{f_2 + f_4} \quad (13)$$

这里 α, φ 为任意的常数。

定理 4 对任意的 $\alpha, \varphi \in C$, 约束 (13) 与交比系统的方程 (10) 是相容的。

证明 设在四个顶点 z_0, z_1, z_2, z_3 上 u 的合理的柯西数据已经给出。由 z_0 点的约束可得 u 在点 z_4 的值, 然后由 (10) 得 u 在 $z_5 = z_0 + 1 + i, z_6 = z_0 + 1 - i$ 的值; 由 z_1 的约束可得 u 在点 $z_7 = z_0 + 2$ 的值, 再由 (10) 得 u 在 $z_8 = z_0 + 2 + i, z_9 = z_0 - 1 +$

i 值; 又由 z_2 点的约束得 u 在 $z_{10} = z_0 + 2i$ 的值, 可得到 u 在 $z_{11} = z_0 + 1 + 2i$ 的值。以此类推, 这就证明了其可解性。由归纳法, 只需验证在点 z_5 处也满足约束方程即可。这个工作已在数学计算机逻辑演算系统的帮助下完成。

推论 1 满足约束 (13) 的方程 (10) 的解 $u: V(SG) \rightarrow C$ 由 $u(0), u(1), u(i)$ 唯一决定。

现在我们说明约束 (13) 如何产生可积系统的同单值解^[13]。为方便见, 我们采用 $L(e)$ 的另一种度规。设 $\mu = \lambda^2$, 对每一条有向边 $e \in E_n (n = 1, 2)$, 令

$$L^{(n)}(e, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & f \\ \mu g & 1 \end{pmatrix}, \quad fg = \Delta_n.$$

则波函数 ψ 在相邻顶点的值之间关系为

$$\begin{aligned} \psi_{k+1,l}(\mu) &= L^{(1)}(e, \mu) \psi_{k,l}(\mu) \\ \psi_{k,l+1}(\mu) &= L^{(2)}(e, \mu) \psi_{k,l}(\mu) \end{aligned} \quad (14)$$

定理 5 满足约束 (13) 的交比系统方程 (10) 的解是同单值的, 即存在一个波函数 $\psi: Z^2 \rightarrow GL(2, C)[\mu]$ 满足 (14) 及关于 μ 的线性微分方程

$$\frac{d}{d\mu} \psi_{k,l}(\mu) = A_{k,l}(\mu) \psi_{k,l}(\mu) \quad (15)$$

$$A_{k,l} = \frac{D(z)}{\mu} + \frac{C_{k,l}}{\mu - 1} + \frac{B_{k,l}}{\mu + c} \quad (16)$$

其中 $D(z), C_{k,l}, B_{k,l}$ 为如下与 μ 无关的矩阵

$$D(z) = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2} & \alpha u + \varphi \\ 0 & \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$C_{k,l} = \frac{k}{f_1 + f_3} \begin{pmatrix} f_1 & -f_1 f_3 \\ -1 & f_3 \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$B_{k,l} = \frac{cl}{f_2 + f_4} \begin{pmatrix} f_2 & -f_2 f_4 \\ -1 & f_4 \end{pmatrix} \quad (19)$$

证明 为了方便, 我们用记号 $\tilde{\cdot}$ 与 $\bar{\cdot}$ 分别表示 x 与 y 轴正方向上对象的改变。如: $\tilde{z} = z + 1$, $\bar{z} = z + i$ 。若 $e = (z_1, z_2)$, 则 $\tilde{e} = (z_1 + 1, z_2 + 1)$, $\bar{e} = (z_1 + i, z_2 + i)$ 等等。于是 (14) 与 (15) 等价于

$$L^{(1)}(\tilde{e}) L^{(2)}(e) = L^{(2)}(\tilde{e}) L^{(1)}(e) \quad (20)$$

$$\frac{d}{d\mu} L^{(1)}(e) = A_{k+1,l} L^{(1)}(e) - L^{(1)}(e) A_{k,l} \quad (21)$$

$$\frac{d}{d\mu} L^{(2)}(e) = A_{k,l+1} L^{(2)}(e) - L^{(2)}(e) A_{k,l} \quad (22)$$

将 (16) 代入 (20) 至 (22) 中计算 $\mu = 0$,

$1, -c, \infty$ 的留数, 上面的系统相当于下面 8 个矩阵方程

$$D(\tilde{z}) L^{(1)}(e, 0) = L^{(1)}(e, 0) D(z),$$

$$D(\bar{z}) L^{(2)}(e, 0) = L^{(2)}(e, 0) D(z) \quad (23)$$

$$C_{k+1,l} L^{(1)}(e, 1) = L^{(1)}(e, 1) C_{k,l},$$

$$C_{k,l+1} L^{(2)}(e, 1) = L^{(2)}(e, 1) C_{k,l} \quad (24)$$

$$B_{k+1,l} L^{(1)}(e, -c) = L^{(1)}(e, -c) B_{k,l},$$

$$B_{k,l+1} L^{(2)}(e, -c) = L^{(2)}(e, -c) B_{k,l} \quad (25)$$

$$(C_{k+1,l} + B_{k+1,l} + D(\tilde{z})) Q - Q(C_{k,l} + B_{k,l} + D(z)) = Q \quad (26)$$

$$(C_{k,l+1} + B_{k,l+1} + D(\bar{z})) Q - Q(C_{k,l} + B_{k,l} + D(z)) = Q \quad (27)$$

$$\text{其中 } Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

将 $D(z), D(\tilde{z}), D(\bar{z}), L^{(1)}(e), L^{(2)}(e)$ 代入即可得出 (23) 成立。又 $\det \psi_{k,l} = (\mu - 1)^k (\mu + c)^l \det \psi_{0,0}(\lambda)$ 可知: $\text{tr } A_{k,l}(\mu) = \frac{k}{1 - \mu} - \frac{cl}{\mu + c} + \alpha(\mu)$, 其中 $\alpha(\mu)$ 与 k, l 无关。由此可得: $\text{tr } C_{k,l} = -k$, $\text{tr } B_{k,l} = -cl$ 。而 (24) 与 $\text{tr } C_{k,l} = -k$ 蕴涵了 (18)。同理, (25) 与 $\text{tr } B_{k,l} = -cl$ 蕴涵了 (19)。最后验证 (26)。等式 (27) 的验证方法是类似的。矩阵方程 (26) 相当于下面两个数量方程

$$\begin{aligned} c_{12} + b_{12} + d_{12} &= 0, \\ (c_{22})_{k+1,l} + (b_{22})_{k+1,l} - (c_{11})_{k,l} - (b_{11})_{k,l} + d_{22} - d_{11} &= 1 \end{aligned} \quad (28)$$

第一个方程即为约束 (13)。由于 $d_{22} - d_{11} = \alpha$, 因此要证第二个方程即证

$$1 - \alpha = (k+1) \frac{\tilde{f}_3}{\tilde{f}_1 + \tilde{f}_3} + cl \frac{\tilde{f}_4}{\tilde{f}_2 + \tilde{f}_4} -$$

$$k \frac{f_1}{f_1 + f_3} - cl \frac{f_2}{f_2 + f_4}$$

又由 $\alpha f_1 = \alpha(\tilde{u} - u)$, 所以只须证

$$\frac{\tilde{f}_4}{\tilde{f}_2 + \tilde{f}_4} - \frac{f_2}{f_2 + f_4} = -\frac{\tilde{f}_2 \tilde{f}_4}{\tilde{f}_3(\tilde{f}_2 + \tilde{f}_4)} + \frac{f_2 f_4}{f_1(f_2 + f_4)}$$

经整理得到, $\tilde{f}_4 f_4 (f_1 + \tilde{f}_2 - f_2) = \tilde{f}_2 f_2 (f_1 + f_4 - \tilde{f}_4)$ 。又因为

$$f_1 (f_1 + \tilde{f}_2 - f_2) = -c \tilde{f}_2 f_2$$

$$f_1 (f_1 + f_4 - \tilde{f}_4) = -c \tilde{f}_4 f_4$$

故等式成立。

由上面讨论我们可以直接推出

定理6 具有初始条件 $u(0) = 0, u(1) = 1, u(i) = ce^{i\theta}$ 的交比系统在约束 (13) 下的解定义了扇形 S (第一象限) 上一个交比为 $-c$ 的 SG 圆模式。

4 z^α 与 $\log z$ 模式

现在我们讨论 $c = 1$ 时的情形。

定理7 当 $c = 1$ 时, 具有初始条件 $u(0) = 0, u(1) = 1, u(i) = e^{i\theta}$ 的交比系统在约束 (13) 下的解定义了扇形 S 上一个交比为 -1 的 SG 圆模式。如果扩充 u 到 SG 上基本正方形的欧氏中心, 则对应圆的圆心为

$$u\left(\frac{2k+1}{2} + \frac{2l+1}{2}i\right) = \frac{u(k,l) + u(k+1,l+1)}{2},$$

$$k+l = 0 \pmod{2} \quad (29)$$

$$u\left(\frac{2k+1}{2} + \frac{2l+1}{2}i\right) = \frac{u(k+1,l) + u(k,l+1)}{2},$$

$$k+l = 1 \pmod{2} \quad (30)$$

证明 当 $c = 1$ 时, 在初始条件 $u(0) = 0, u(1) = 1, u(i) = e^{i\theta}$ 下, 所有基本四边形 $(u(k,l), u(k+1,l), u(k+1,l+1), u(k,l+1))$ 是风筝形式^[11], 并内接于所对应的圆。由几何知识可知, 当 $k+l = 0 \pmod{2}$ 时, 顶点 $u(k+1,l), u(k,l+1)$ 处的角为 $\frac{\pi}{2}$, 则圆心为 $\frac{u(k,l) + u(k+1,l+1)}{2}$ 。当 $k+l = 1 \pmod{2}$

时, 顶点 $u(k,l), u(k+1,l+1)$ 处的角为 $\frac{\pi}{2}$, 则圆心为 $\frac{u(k+1,l) + u(k,l+1)}{2}$ 。

定义3 令 $0 < \alpha < 1, \theta = \alpha\pi$, 则定理7 中的 SG 圆模式称为 $z^{2\alpha}$ - SG 圆模式。也就是, 对于该 SG - 圆模式, 扇形 S 的像开角为 $\alpha\pi$, 相当于解析函数 $z \rightarrow z^{2\alpha}$ 。

注意到, 当 $\alpha = \frac{2}{m}, m \in \mathbb{N}$ 时, $z^{2\alpha}$ - SG 圆模式与它的旋转角度 $\frac{2n\pi}{m}, (n = 1, 2, \dots, m-1)$ 的 $m-1$ 次组成了覆盖整个复平面的圆模式。除了在原点处是 m 个圆的交点, 它是一个 SG 圆模式。

图2 为 $\alpha = 1/3$ 的情形。

特别地, 当 $\alpha = 1$ 时, 也就是, 交比为 -1 的 z^2 - SG 圆模式可由约束 (13) 与下面初始数据得到:

$$u(0) = 0, u(1) = 0, u(i) = 0, u(1+i) = \frac{2}{\pi}i,$$

$$u(2) = 1, u(2i) = -1$$

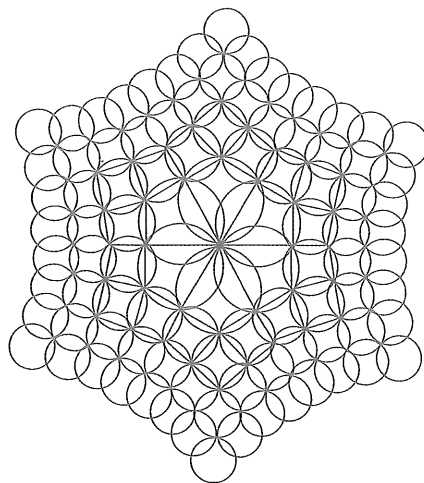


图2 $\alpha = 1/3$ 的情形

Fig. 2 Case $\alpha = 1/3$

如图3。当 $\alpha = 0$ 时, 所对应的交比为 -1 的 SG 圆模式可由约束 (13) 与下面初始数据得到:

$$u(0) = \infty, u(1) = 0, u(i) = i\pi, u(1+i) = \frac{\pi}{2}i, u(2) = 1, u(2i) = 1 + \pi i$$

我们称为 $\log z$ - SG 圆模式, 如图4。

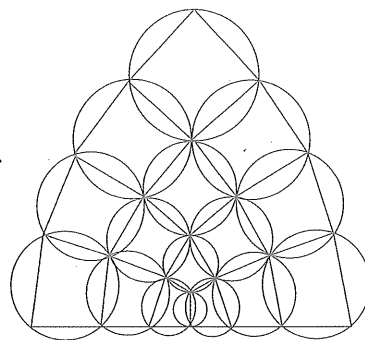


图3 z^2 - SG 圆模式

Fig. 3 z^2 - SG circle pattern

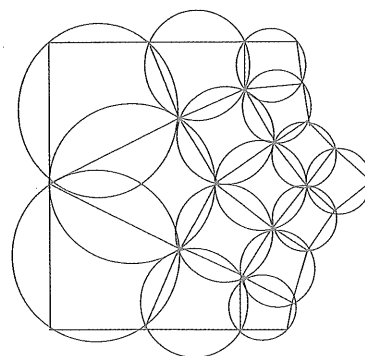


图4 $\log z$ - SG 圆模式

Fig. 4 $\log z$ - SG Circle pattern

(下转第23页)

- FU Xinghua, CHEN Junning. A point by point multiple sweeps numerical algorithm for dopant profiling based on CV data [J]. Acta Electronica Sinica, 1992, 20(5): 33 - 38.
- [7] 翁寿松, 毛立平. 超突变结变容二极管的杂质浓度分布及 n 值[J]. 半导体技术, 2000, 25(1): 31 - 32, 38.
- WENG Shousong, MAO Liping. Distribution of impurity concentration and n value for hyperabrupt varactor [J]. Semiconductor Technology, 2000, 25(1): 31 - 32, 38.
- [8] 屈盛, 刘祖明, 廖华, 等. 晶体硅扩散层有效杂质的浓度分布[J]. 太阳能学报, 2006, 27(3): 295 - 299.
- QU Sheng, LIU Zuming, LIAO Hua, et al. Study of the effective doping concentration profile in crystalline silicon diffusion layer [J]. Acta Energaie Solaris Sinica, 2006, 27(3): 295 - 299.
- [9] 任红霞, 荆明娥, 郝跃. 杂质浓度对槽栅 PMOSFET 抗热载流子特性的影响[J]. 固体电子学研究与进展, 2002, 22(2): 174 - 180.
- REN Hongxia, JING Ming, HAO Yue. Influence of doping density on hot-carrier-effect in grooved gate PMOS-FET [J]. Research & Progress of Solid State Electronics, 2002, 22(2): 174 - 180.
- [10] 哈力木拉提, 阿拜, 拜山, 等. p-n 结二极管结区边界附近的交流电特性[J]. 物理学报, 2008, 57(2): 1161 - 1165.
- HALIMULATI, ABAI, BAISHAN, et al. Boundary alternating current characteristics of an ideal p-n junction diode [J]. Acta Physica Sinica, 2008, 57(2): 1161 - 1165.
- [11] 彭承, 盛箴, 孙恒慧. 单边分子束外延硅 pn 结 C-V 关系的新特点[J]. 物理学报, 1988, 37(6): 1025 - 1029.
- PENG Cheng, SHENG Chi, SUN Henghui. New C-V characteristic of Si pn diodes prepared by molecular beam epitaxy [J]. Acta Physica Sinica, 1988, 37(6): 1025 - 1029.
- [12] 林金庭, 徐稼迟, 王因生, 等. 双掺硅单晶及其 pn 结研究[J]. 固体电子学研究与进展, 1994, 4(4): 1 - 8.
- LIN Jinting, XU Jiachi, WANG Yinsheng, et al. An investigation on dual-dopant Si and its p-n junction [J]. Research & Progress of Solid State Electronics, 1994, 4(4): 1 - 8.
- [13] 李潮锐, 刘小伟. 二极管 p-n 结杂质浓度分布模型改进[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2008, 47(3): 37 - 40, 46.
- LI Chaorui, LIU Xiaowei. An improved model for analysis on impurity distribution in diode p-n junction [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2008, 47(3): 37 - 40, 46.

(上接第 19 页)

参考文献

- [1] THURSTON W P. The finite Riemann mapping theorem [C]. Invited Talk at the International Symposium on the Occasion of the Bieberbach Conjecture, 1985.
- [2] RODIN B, SULLIVAN D. The convergence of circle packings to the Riemann mapping [J]. J Differential Geometry, 1987, 26: 349 - 360.
- [3] MARDEN A, RODIN B. On Thurston's formulation and proof of Andreev's theorem [J]. Lect Notes Math, 1990, 1435: 103 - 115.
- [4] BEARDON A F, STEPHENSON K. The uniformization theorem for circle packings [J]. Indiana Univ Math J, 1990, 39: 1383 - 1425.
- [5] HE Z X. Rigidity of infinite disk patterns [J]. Ann of Math, 1999, 149: 1 - 33.
- [6] HE Z X, SCHRAMM O. The C^∞ -convergence of hexagonal disk packings to the Riemann map [J]. Acta Math, 1998, 180: 219 - 245.
- [7] SCHRAMM O. Circle patterns with the combinatorics of the square grid [J]. Duke Math J, 1997, 86: 347 - 389.
- [8] LAN S Y, DAI D Q. The C^∞ -convergence of SG circle patterns to the Riemann mapping [J]. J of Math Anal and Appl, 2007, 332: 1350 - 1363.
- [9] AGAFONOV S I, BOBENKO A I. Discrete z' and Painlevé equations [J]. Internat Math Res Notes, 2000, 4: 165 - 193.
- [10] BOBENKO A I, HOFFMANN T, SURIS YU B. Hexagonal circle patterns and integrable systems: patterns with the multi-ratio property and Lax equations on the regular triangular lattice [J]. Internat Math Res Notices, 2002, 3: 111 - 164.
- [11] BOBENKO A I, HOFFMANN T. Hexagonal circle patterns and integrable systems: patterns with constant angles [J]. Duke Math J, 2003, 116(3): 525 - 566.
- [12] AGAFONOV S I, BOBENKO A I. Hexagonal circle patterns with constant intersection angles and discrete Painlevé and Ricci equations [J]. J Math Phys, 2003, 44(8): 3455 - 3469.
- [13] ITS A R. "Isomonodromic" solutions of equations of zero curvature [J]. Math USSR Izv, 1983, 26: 497 - 529.